

# 计算多层墙体响应系数的频域回归方法<sup>\*</sup>

陈友明<sup>1</sup>, 王盛卫<sup>2</sup>

(1. 湖南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410082; 2. 香港理工大学屋宇设备工程系, 香港 九龙)

**摘 要:** 基于墙体热传导的理论频率响应提出了计算多层墙体响应系数的频域回归方法. 首先在所要关心的频率范围内计算出总的传导矩阵的频率响应; 然后求解线性方程组得到墙体内外表面吸热及传热的简单的多项式  $s$ -传递函数, 该多项式传递函数与双曲型  $s$ -传递函数在频率特性上是等价的; 最后由多项式传递函数计算出墙体的响应系数. 实例验证表明, 该方法非常简单高效, 计算精度高、速度快.

**关键词:** 频域回归方法; 多层墙体; 响应系数

**中图分类号:** TU111

**文献标识码:** A

## Frequency Domain Regression Method to Calculate Response Factors of Multilayer Walls

CHEN You-ming<sup>1</sup>, WANG Sheng-wei<sup>2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Hunan Univ., Changsha 410082, China;

2. Dept of Building Services Engineering, The Hong Kong Polytechnic University, Kowloon, Hong Kong, SAR, China)

**Abstract** Frequency domain regression (FDR) method is developed to calculate the response factors of multilayer walls in this paper. This method is based on the theoretical frequency characteristics of transient heat conduction through a building construction to estimate a simple polynomial  $s$ -transfer function. The simple polynomial  $s$ -transfer function is completely equivalent to the hyperbolic  $s$ -transfer function of the wall in terms of frequency characteristics. First, the frequency characteristics of the total transmission matrix are calculated within the frequency range concerned. Then, a set of linear equations is solved to yield a simple polynomial  $s$ -transfer function for internal, cross and external heat conduction, respectively. Finally, the wall response factors are obtained simply by applying inverse Laplace transforms on the polynomial  $s$ -transfer function. The comparisons and validations show that this method is very simple and

<sup>\*</sup> 收稿日期: 2000-01-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (59578004); 香港理工大学资助项目 (G. S869)

作者简介: 陈友明 (1966-), 男, 湖南祁东人, 湖南大学副教授, 博士.

efficient, and has high accuracy and fast computational speed.

**Key words** FDR method; multilayer wall; response factors

在建筑及其暖通空调系统的设计、运行和管理中,用仿真模型预测和分析其能源和环境性能以及测试和评价能源管理与控制系统(EMCS)的控制策略和算法变得越来越重要<sup>[1,2]</sup>。房间冷热负荷(包括气象数据)模型是建筑能源分析及HVAC系统仿真软件的重要组成部分。建筑墙体传热是房间冷热负荷和建筑能耗的主要部分。建筑墙体的不稳定传热使建筑能耗分析及HVAC系统分析变得相当复杂,花费了大量的计算时间。人们一直在不懈地探索更好的分析墙体不稳定传热的方法,其方法也在不断地改进和发展。

响应系数法和 $z$ 传递函数法<sup>[3,4]</sup>是目前使用最广泛的建筑全年能耗及空调系统冷热负荷分析计算方法。响应系数法是计算 $z$ 传递函数系数的基础。响应系数法在一些较流行的建筑仿真软件中仍然使用。导出墙体响应系数的传统方法是直接寻根法。有关学者在使用直接寻根法时已经遇到求根困难、计算量大、易失根等问题。因此, Hittle提出了一种改进的寻根方法来尽可能地避免丢根现象<sup>[5]</sup>。后来, 欧阳坤泽<sup>[6]</sup>及 Davies<sup>[7]</sup>分别提出了状态空间法和时域方法来计算墙体的响应系数。状态空间法需要采取一些措施来加快收敛速度, 提高计算精度。时域方法在本质上与直接寻根法是一回事, 其迭代计算也需要很长时间。

本文基于墙体热传导的理论频率响应提出了一种计算墙体响应系数的新方法——频域回归方法。

## 1 墙体不稳定热传导的理论频率响应

建筑墙体由含有两侧空气层的多层墙体构成, 可视为一维多层均质平板结构。各层的热物性参数可视为常数。其不稳定热传导偏微分方程和傅里叶方程经拉氏变换后可得到建立墙体两侧温度和热流之间关系的传导矩阵, 形式如下:

$$\begin{bmatrix} T_i(s) \\ q_i(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_o(s) \\ q_o(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中,  $T$  为温度;  $q$  为墙体表面热流;  $A, B, C$  和  $D$  为表征墙体动态特性的传递函数;  $s$  为拉氏变量; 下标  $i$  和  $o$  分别表示墙体内外侧。对于含有两侧空气层的  $n$  层墙体, 墙体的传导矩阵是各层传导矩阵的乘积:

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ C_1(s) & D_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2(s) & B_2(s) \\ C_2(s) & D_2(s) \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_n(s) & B_n(s) \\ C_n(s) & D_n(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o(s) & B_o(s) \\ C_o(s) & D_o(s) \end{bmatrix} \quad (2)$$

每层的传导矩阵的元素分别为如下形式的双曲或指数函数:

$$A_k = D_k = \cosh(L_k \sqrt{s/a_{mk}}), \quad (3)$$

$$B_k = R_k \sinh(L_k \sqrt{s/a_{mk}}) / (L_k \sqrt{s/a_{mk}}), \quad (4)$$

$$C_k = L_k \sqrt{s/a_{mk}} / \sinh(L_k \sqrt{s/a_{mk}}) / R_k. \quad (5)$$

式中  $a_{mk} = (\lambda_k / (\delta_k C_{pk}))$ ,  $\lambda_k$ ,  $\delta_k$ ,  $C_{pk}$ ,  $R_k$  和  $L_k$  分别为墙体第  $k$  层的导温系数、导热系数 ( $W/m$

° K), 密度 (kg /m<sup>3</sup>), 比热容 (J/(kg ° K)), 热阻 (m<sup>2</sup> K /W)和厚度 (m).

式 (1)可改写成如下形式

$$\begin{bmatrix} q(s) \\ q_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_x(s) & -G_r(s) \\ G_r(s) & -G_z(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i(s) \\ T_o(s) \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中  $G_x(s)$ ,  $G_z(s)$ 及  $G_r(s)$ 分别为墙体的内、外表面  $s$ -吸热传递函数及  $s$ -传热传递函数. 他们都是复杂的超越双曲型  $s$ -传递函数. 由于  $A(s)D(s) - C(s)B(s) = 1$ ,这些传递函数可写为

$$G_x(s) = A(s) / B(s), \tag{7}$$

$$G_r(s) = 1 / B(s), \tag{8}$$

$$G_z(s) = D(s) / B(s). \tag{9}$$

将  $s = jk(j = \sqrt{-1})$ 代入式 (7)~ (9),即可得到的复函数  $G_x(jk)$ ,  $G_z(jk)$ 及  $G_r(jk)$ ,称之为墙体内、外表面吸热及传热的理论频域响应<sup>[8]</sup>,并都记为  $G(jk)$ .

## 2 墙体的多项式 $s$ -传递函数

从系统理论上看,如果系统动态模型与其真实系统是完全等价的,这些模型应该具有相同的响应特性. 频率响应特性,即相频特性(输入输出峰值之间相位差)和幅频特性(输出输入间的峰值比)可以用来衡量系统动态模型的等价性. 如果一个简单的多项式  $s$ -传递函数的频率响应与墙体热传导理论频率响应完全一致,可以用该多项式  $s$ -传递函数来代替墙体复杂的双曲型  $s$ -传递函数. 用该多项式  $s$ -传递函数来计算响应系数可以避免失真现象及大量的数值迭代计算. 下面给出用频域回归方法导出多项式  $s$ -传递函数的过程.

设墙体存在可以表示成两个  $s$ -多项式之比的  $s$ -传递函数

$$G(s) = \frac{U_0 + U_1s + U_2s^2 + \cdots + U_rs^r}{1 + T_1s + T_2s^2 + \cdots + T_ms^m} = \frac{B(s)}{A(s)}, \tag{10}$$

式中  $A(s) = 1 + T_1s + T_2s^2 + \cdots + T_ms^m$ ;  $B(s) = U_0 + U_1s + U_2s^2 + \cdots + U_rs^r$ ;  $T$ 和  $U$ 为多项式系数;  $G(s)$ 称为多项式  $s$ -传递函数. 当  $s = jk$ ,多项式  $s$ -传递函数的频率响应为

$$G(jk) = \frac{U_0 + U_1jk + U_2(jk)^2 + \cdots + U_r(jk)^r}{1 + T_1jk + T_2(jk)^2 + \cdots + T_m(jk)^m} = \frac{B(jk)}{A(jk)}. \tag{11}$$

在所关心的频率范围内选取  $N$  个频率点 ( $k_1, k_2, \cdots, k_N$ ),在第  $k$  个频率点  $k_k$ ,复函数  $G(jk)$ 可写成实部和虚部两个部分,即

$$G(jk_k) = G_k = P_k + jQ_k. \tag{12}$$

引入如式 (13)所示的准则函数,并定义如式 (14)矢量.

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N |B(jk_k) - G(jk_k) [1 + A(jk_k)]|^2 = \sum_{k=1}^N |B(jk_k) - G_k(jk_k) - G_k^*|^2, \tag{13}$$

$$\theta^T = [U_0 \ U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ \cdots \ T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ \cdots]. \tag{14}$$

假定存在一个  $\theta$ 使准则函数最小,即  $J(\theta)|_{\theta} = \min$ ,并定义几个如式 (15)所示的中间

变量,及式(16)和(17)的矩阵和矢量. 则 $\hat{\theta}$ 可由式(18)求得.

$$\left. \begin{aligned} V_i &= \sum_{k=1}^N k_k^i, & S_i &= \sum_{k=1}^N k_k^i P_k \\ W_i &= \sum_{k=1}^N k_k^i Q_k, & U_i &= \sum_{k=1}^N k_k^i (P_k^2 + Q_k^2) \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} V_0 & 0 & -V_2 & 0 & V_4 & \cdots & W_1 & S_2 & -W_3 & -S_4 & W_5 & \cdots \\ 0 & V_2 & 0 & -V_4 & 0 & \cdots & -S_2 & W_3 & S_4 & -W_5 & -S_6 & \cdots \\ -V_2 & 0 & V_4 & 0 & -V_6 & \cdots & -W_3 & -S_4 & W_5 & S_6 & -W_7 & \cdots \\ 0 & -V_4 & 0 & V_6 & 0 & \cdots & S_4 & -W_5 & -S_6 & W_7 & S_8 & \cdots \\ V_4 & 0 & -V_6 & 0 & V_8 & \cdots & W_5 & S_6 & -W_7 & -S_8 & W_9 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & & & \\ W_1 & -S_2 & -W_3 & S_4 & W_5 & \cdots & U_2 & 0 & -U_4 & 0 & U_6 & \cdots \\ S_2 & W_3 & -S_4 & -W_5 & S_6 & \cdots & 0 & U_4 & 0 & U_6 & 0 & \cdots \\ -W_3 & S_4 & W_5 & -S_6 & -W_7 & \cdots & -U_4 & 0 & U_6 & 0 & -U_8 & \cdots \\ -S_4 & -W_5 & S_6 & W_7 & -S_8 & \cdots & 0 & -U_6 & 0 & U_8 & 0 & \cdots \\ W_5 & -S_6 & -W_7 & S_8 & W_9 & \cdots & U_6 & 0 & -U_8 & 0 & U_{10} & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\Theta^T = [S_0 \quad W_1 \quad -S_2 \quad -W_3 \quad S_4 \quad \cdots \quad 0 \quad U_2 \quad 0 \quad U_4 \quad 0 \quad \cdots], \quad (17)$$

$$\hat{\theta} = \Gamma^{-1} \Theta. \quad (18)$$

由矢量 $\hat{\theta}$ 可得到多项式 $s$ 传递函数的系数 $\hat{U}_0 \sim \hat{U}_t$ 和 $\hat{T}_1 \sim \hat{T}_m$ . 上述方法可称之为频域回归(FDR)方法. FDR方法可将墙体复杂的双曲型 $s$ 传递函数转化为简单的多项式 $s$ 传递函数. 用 $G_X(jk)$ ,  $G_Z(jk)$ 和 $G_Y(jk)$ 代替 $G(jk)$ ,可分别得到墙体的内外表面吸热以及墙体传热的多项式 $s$ 传递函数.

### 3 墙体响应系数的计算

由频域回归方法得到的 $G(s)$ 的分母 $1+A(s)$ 一般具有 $m$ 个负实根 $(-s_i, i=1, 2, \cdots, m)$ (即多项式 $s$ 传递函数的极点),其中 $s$ 是正实数.  $t=0$ 时刻的斜坡激励定义为:在保持室内温度和 $t < 0$ 时墙体的外侧空气温度均为零的条件下,墙体的外侧空气温度在 $t=0$ 时刻以 $ZKh^{-1}$ 的斜率递增. 假定墙体受到单位斜坡激励( $Z=1$ )的作用,内表面热流 $q^{(0)}(t)$ (即,多项式 $s$ 传递函数 $G_Y(s)$ 的响应)计算如下

$$q^{(0)}(t) = L^{-1} \left( \frac{G_Y(s)}{s^2} \right) = L^{-1} \left( \frac{B(s)}{s^2(1+A(s))} \right) = Kt + \sum_{i=1}^m W_i (1 - e^{-s_i t}). \quad (19)$$

式中 $K$ 为墙体总的传热系数; $W_i (i=1, 2, \cdots, m)$ 是 $G_Y(s)/s^2$ 在第 $i$ 个根处的留数,其计算公式为

$$W_i = -B(-s_i) / [s_i^2 A'(-s_i)]. \quad (20)$$

$t = 0$  时刻的单位三角脉冲激励是由一个  $t = -\Delta f$  时刻的单位斜坡激励、一个  $t = 0$  时刻的斜率为  $Z = 2$  的斜坡激励和一个  $t = \Delta f$  时刻的单位斜坡激励组成。由单位三角脉冲激励作用产生的进入室内的热流为:

$$Q_{n0}(t) = q_{n0}(t - \Delta f) - 2q_{n0}(t) + q_{n0}(t + \Delta f) \quad (21)$$

响应系数  $Y(0), Y(1), Y(2), \dots$  就是  $Q_{n0}(t)$  在  $t = 0, \Delta f, 2\Delta f, \dots$  时刻的值 (一般  $\Delta f$  取为 1 小时)。实际上, 第一个系数  $Y(0)$  的值是由第一个单位斜坡激励响应在  $t = 0$  时刻的值, 随后的系数是三个斜坡激励响应的叠加。当墙体外侧空气温度 (或太阳空气温度) 为已知的逐时值且室内空气温度保持为  $0^\circ\text{C}$  时, 在第  $i$  小时的室内表面的进入放进房间的热流用下式计算

$$q_{n0,i} = Y(0)T_{0,i} + Y(1)T_{0,i-1} + \dots + Y(k)T_{0,i-k} + \dots \quad (22)$$

式中下标  $n$  表示该热流是墙体的第  $n$  层的室内侧表面进入房间的热流, 下标 0 表示热流是由第 1 层的室外侧空气温度引起的。

与直接寻根法相比, 频域回归方法不需要导出多层墙体复杂的双曲型特征方程的具体表达式, 也不需要数值方法搜索该双曲型特征方程的大量的根及其留数。因此, 它避免了由失根而导致的计算错误, 其计算过程简单、高效。当然, 频域回归方法还可用于计算墙体  $z$  传递函数, 将另文研究。

## 4 计算步骤

用频域回归方法计算多层墙体响应系数的步骤可归纳如下。

Step1 给出墙体各层的热参数  $\lambda, d, C_p$ , 厚度  $L$ , 以及内外两侧空气层的热阻  $R_0$  和  $R_1$ 。确定所关心的频率范围  $[10^{-n_1}, 10^{-n_2}]$  和频率点数  $N$ 。  $n_1, n_2$  和  $N$  一般分别取为 10, 3 和  $9(n_1 - n_2)$ 。

Step2 在所关心的频率范围内等对数间隔地产生  $N$  个频率点 (即:  $k_k = 10^{-n_1 + (k-1)(n_1-n_2)/(N-1)}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ))。在频率点  $k_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), 将  $s = jk_k$  代入式 (3) ~ (5) 计算各层的复数传导矩阵, 并通过式 (2) 的复数矩阵相乘计算墙体总的传导矩阵的元素  $A(jk_k), B(jk_k)$  和  $D(jk_k)$ , 从而由式 (7) ~ (9) 得到墙体的理论频率响应  $G_x(jk_k), G_y(jk_k)$  和  $G_z(jk_k)$ 。

Step3 确定多项式  $H = A(s)$  和  $B(s)$  的阶次  $m$  和  $r$ , 一般取为 5。将  $G_y(jk_k)$  代替  $G$ , 用式 (19) 估计  $G_y(s)$  的系数  $T(i=1, 2, \dots, m)$  和  $U(i=0, 1, 2, \dots, r)$ 。

Step4 解  $m$  阶线性方程  $H = A(s) = 0$  求它的根, 用式 (20) 计算每个根的留数  $W(i=1, 2, \dots, m)$ , 然后用式 (21) 计算响应系数  $Y(k)$ 。

同样地, 从  $G_x(jk)$  和  $G_z(jk)$  可计算出其它的响应系数和  $z$  传递函数系数。从计算公式和计算步骤来看, 频域回归方法避免了求复杂的双曲型特征方程的根和其它方法中的迭代计算, 因此, 它显得格外简单高效、易于使用和实现。

5 比较与验证

用 FDR方法对大量的实例进行了计算研究并与已有方法的进行比较 ,以探明用这种简单高效的方法来计算墙体的响应系数的实用性. 下面仅给出一个实例来验证本文提出的 FDR方法 ,并与已发表的结果进行比较.

欧阳坤泽和 Haghighat<sup>[6]</sup>用状态空间法和直接寻根法计算出一个三层混凝土墙体的响应系数  $Y(k)$  ( $k= 0, 1, 2, 3, \cdots$ ). 该三层混凝土墙体由两层混凝土和中间的隔热层构成 ,有关参数用 SI单位给出于表 1中. 用 FDR方法计算得到的墙体传热多项式  $s$ 传递函数如下:

$$Gx(s) = \frac{-4.90351E-5s^4 - 2.35096E-7s^4 - 6.99650E-10s^3 + 1.38768E-12s^2 - 1.77507E-15s + 1.13961E-18}{s^5 + 3.19462E-3s^4 + 3.59719E-6s^3 + 1.49979E-9s^2 + 1.21286E-13s + 2.30188E-18}$$

进而计算出它们的响应系数  $Y(k)$ . 将三种方法的计算结果都列于表 2中进行比较 ,FDR方法给出了很高精度的结果.

表 1 三层混凝土墙参数

材 料	$L/m$	$\lambda/(W\,m^{-1}\,K^{-1})$	$d/(kg\,m^{-3})$	$C_p/(J\,kg^{-1}\,K^{-1})$	$R/(m^2\,KW^{-1})$
室外空气层					0.050 0
混凝土	0.089	1.730 0	2 235	1 106	0.051 4
隔热层	0.127	0.074 4	24	992	1.707 0
混凝土	0.089	1.730 0	2 235	1 106	0.051 4
室内空气层					0.160 0

表 2 三层混凝土墙响应系数  $Y(k)$  的比较  $W\,m^{-2}\,K^{-1}$

$k$	FDR方法	状态空间法	直接寻根法
0	0.000 015 21	0.000 017 71	0.000 015 49
1	0.001 634 41	0.001 640 78	0.001 645 41
2	0.008 492 18	0.008 526 82	0.008 528 84
3	0.016 008 25	0.016 063 51	0.016 058 04
4	0.021 272 37	0.021 328 61	0.021 324 82
5	0.024 533 70	0.024 581 89	0.024 583 76
6	0.026 300 43	0.026 341 17	0.026 345 35
7	0.026 978 39	0.027 014 26	0.027 016 81
8	0.026 876 82	0.026 909 51	0.026 908 27
9	0.026 229 75	0.026 257 74	0.026 254 29
10	0.025 213 28	0.025 233 50	0.025 231 31
11	0.023 959 04	0.023 970 17	0.023 971 18
12	0.022 564 62	0.022 568 61	0.022 571 55
13	0.021 101 58	0.021 102 07	0.021 104 02
14	0.019 621 66	0.019 621 03	0.019 620 30
15	0.018 161 59	0.018 159 49	0.018 157 08
16	0.016 746 74	0.016 741 30	0.016 739 67
17	0.015 393 96	0.015 384 25	0.015 384 86
18	0.014 113 77	0.014 101 04	0.014 103 10
19	0.012 912 01	0.012 898 71	0.012 900 17

## 6 结 论

本文提出的频域回归方法可用于计算墙体响应系数. 这种方法不需要导出墙体总的传导矩阵的各个元素的表达式, 也不需要数值方法搜索复杂的双曲型特征方程的大量的根及其导数. 用频域回归方法计算墙体响应系数非常简单高效. 所有的计算公式都是简单的显式表达式. 实例比较验证表明: FDR方法可以得到一个简单而又与墙体双曲型  $s$  传递函数完全等价的多项式  $s$  传递函数; 由 FDR方法得到的响应系数与其它方法得到的响应系数精度是相同的. 该方法没有任何迭代计算, 因此它需要比其它方法少得多的计算时间, 也不会存在数值不稳定问题. 所以, 毫无疑问 FDR方法适合于多层墙体的不稳定传热计算; 与其它方法相比, 该方法在建筑能耗分析及 HV AC系统模拟中更加便于使用和实现.

## 参考文献:

- [1] KUSUDA T. Early history and future prospects of buildings system simulation[C]. Proceedings of Building simulation 99, Volume I, Kyoto, Japan, Sept, 1999.
- [2] WANG S W. Dynamic Simulation of a building VAV Air-conditioning system and evaluation of EMCS online control strategies[J]. Building and Environment, 1999, 34: 681– 705.
- [3] STEPHENSON D G, MITALAS G P. Cooling load calculations by thermal response factors[J]. ASHRAE Transactions, 1967, 73(III): 1. 1– 1. 7.
- [4] STEPHENSON D G, MITALAS G P. Calculation of heat conduction transfer functions for multilayer slabs[J]. ASHRAE Transactions, 1971, 77(II ): 117– 126.
- [5] HITTLE D C, BISHOP R. An improved root-finding procedure for use in calculating transient heat flow through multilayer slabs[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1983, 26(1): 1685– 1693.
- [6] OUYANG K, HAGHIGHAT F. A procedure for calculating thermal response factors of multilayer walls—state—space method[J]. Building and Environment, 1991, 26(2): 370– 395.
- [7] DAVIES M G. Wall transient heat flow using time-domain analysis[J]. Building and Environment, 1997, 32(5): 427– 446.
- [8] CHEN Y M, CHEN Z K. A neural-network-based experimental technique for determining  $z$ -transfer function coefficients of a building envelope[J]. Building and Environment, 2000, 35(3): 181– 189.